Mécanique des fluides

Section de génie civil

TD 8 - Correction

Exercices

Exercice 1 Un canal de section rectangulaire et de pente constante (0,5%) est divisé en deux parties de 1 km de longueur chacune, et il se termine par un seuil de 1 m de hauteur. Dans la première partie, la largeur du canal est de 10 m et le lit est fait de graviers grossiers (d_{90} = 10 cm). Dans la seconde partie, la largeur est de 5 m et le lit est fait de graviers plus fins (d_{90} = 1 cm). Voir figure 1. Tracez l'allure de la courbe de remous. Le débit étant $Q = 20\ \mathrm{m^3\ s^{-1}}$.

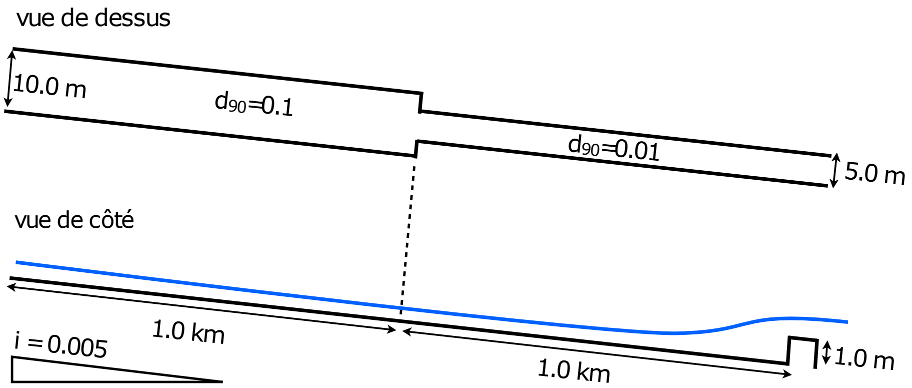

FIGURE 1 – schéma des deux biefs.

1. Donnez la hauteur critique pour chaque partie.
2. Donnez la hauteur normale pour chaque partie (le canal n'est pas supposé infiniment large).
3. Quel est la hauteur d'eau juste à l'amont du seuil ?
4. Quels régimes d'écoulement peut on observer ? Y a-t-il un ressaut hydraulique ?

5. Tracez l'allure de la courbe de remous, ainsi que les hauteurs critiques et normales.

Exercice 2 Un petit canal agricole de section rectangulaire et largeur $b_1 = 1$ m, a une porte verticale avec une ouverture a pour contrôler l'écoulement sortant ($\mu = 0,6$). Le débit est usuellement déterminé par un rétrécissement de largeur $b_2 = 0,3$ m et de hauteur $h_s = 0,2$ m. Le débit mesuré est $Q = 0,25$ m^3/s et vous savez que l'écoulement est subcritique sur la section (1) (voir figure 2). Quelles sont les hauteurs dans les sections (1) à (5) de manière à ce que les hauteurs (4) et (5) soient conjuguées ? Quelle est l'ouverture pour cette condition ?

Hypothèses :
— à l'aval de la porte verticale, il n'y a pas de contrôle hydraulique sur l'écoulement ;
— les pertes de charge sont négligeables.

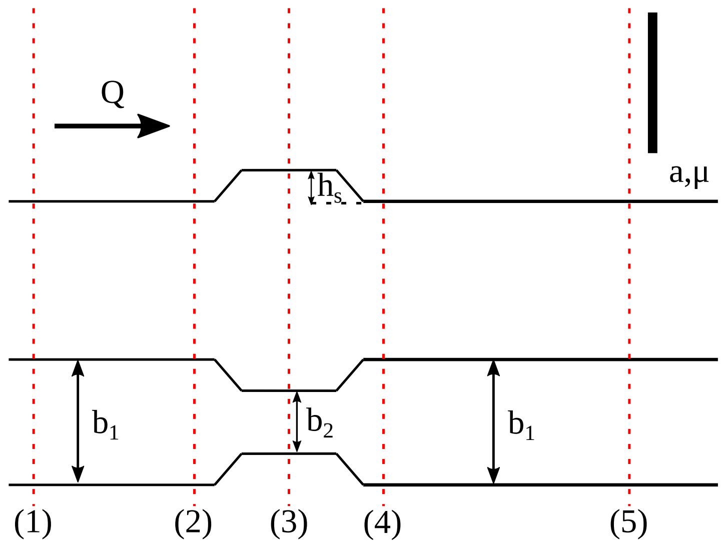

FIGURE 2 – coupe transversale et profil en long du canal agricole

Exercice 3 : rétrécissement d'un canal Le canal de la figure 3 (b_A, i_A, K) a un pas de hauteur a où il change de pente (i_B) et un changement de largeur (b_A).

1. Déterminer les hauteurs dans les sections (1) à (4), indiquées sur la figure, en négligeant les pertes de charge singulières.
2. Classifiez et tracez qualitativement la courbe de remous, avec les hauteurs caractéristiques des différentes parties.

Données : $Q = 0,5$ m^3/s, K =55 m$^{1/3}$/s, $i_A = 0.01$, $i_B = 0,0005$, $a = 0,25$ m, $b_A = 1,5$ m, $b_B = 1$ m.

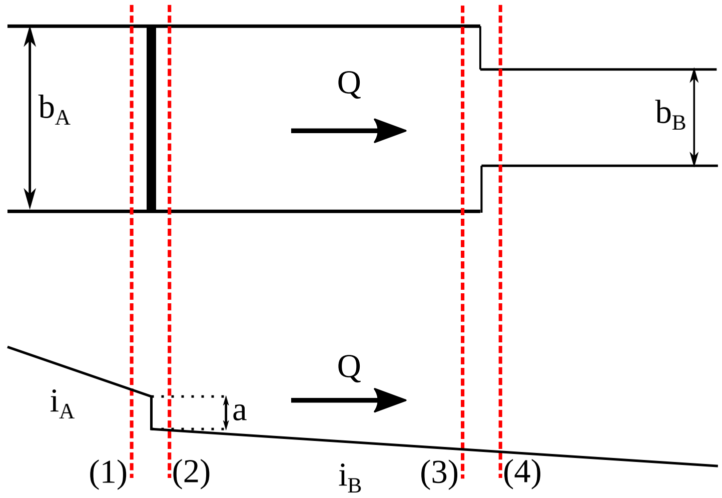

Figure 3 – coupe transversale et profil en long du canal.

Exercice 4 Un lac de retenue est situé derrière un barrage de hauteur h_0. Les pentes de talus sont $\phi = 30°$ par rapport à l'horizontale. Ce barrage est percé par une buse de vidange de diamètre D sur toute sa largeur comme le montre la coupe ci-dessous. La hauteur de plein bord est notée également h_0. Lorsque que la retenue est pleine, une vanne vidange le lac par l'intermédiaire de la buse. L'eau est déversée dans un canal de pente i, de largeur ℓ, et de longueur L. Au bout du canal se trouve un seuil dont la pelle est p. Le canal est en gravier. Pour simplifier les calculs, on négligera l'effet de la largeur dans le calcul du rayon hydraulique (on supposera donc que la largeur est bien plus grande que la hauteur d'eau même si ce n'est pas le cas numériquement). Voir figure 4.

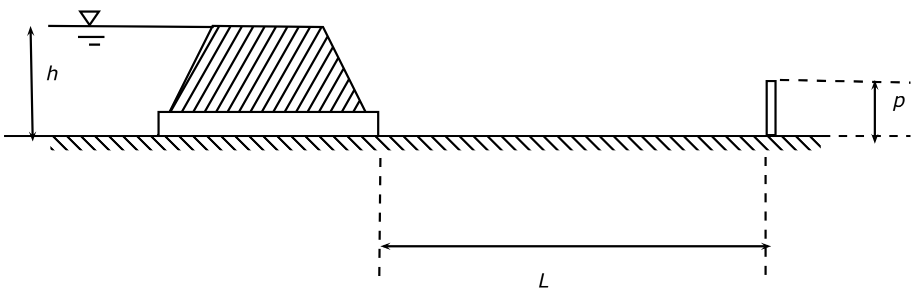

Figure 4 – schéma de l'aménagement étudié.

Données :

— la hauteur du barrage est $h_0 = 10$ m ;

— la granulométrie du gravier du canal est $d_{90} = 20$ mm ;
— le diamètre de la buse est $D = 0,5$ m ;
— les longueur et largeur du canal sont respectivement $L = 1000$ m et $\ell = 5$ m ;
— la pelle vaut $p = 1$ m et le seuil est dénoyé ;
— la pente du canal est $i = 0,1$ %.

1. Calculez la force de pression totale par unité de largeur qui s'exerce sur la face amont du barrage lorsque la retenue est pleine d'eau. Faites l'application numérique.
2. En vous servant de la formule de Torricelli en déduire le débit transitant par la buse.
3. En supposant que le jet à la sortie de la buse occupe immédiatement toute la largeur du canal et que la vitesse reste identique, calculez la hauteur d'eau juste en aval de la buse ?
4. Calculez le coefficient de Manning-Strickler en vous servant de la formule de Jäggi. Pour la suite des calculs, on arrondira la valeur de K à la valeur entière la plus proche.
5. Calculez la hauteur normale dans le canal en considérant une loi de Manning-Strikler pour la résistance du lit (avec la valeur de K trouvée précédemment).
6. Calculez la hauteur critique dans le canal.
7. Quel est le régime d'écoulement une fois que l'eau a atteint un régime permanent uniforme ?
8. En négligeant toute dissipation d'énergie en amont du seuil, calculez la charge spécifique au niveau du seuil.
9. En déduire la hauteur d'eau juste à l'amont du seuil.
10. Tracez qualitativement la ligne d'eau (courbe de remous) en la plaçant correctement par rapport aux grandeurs caractéristiques. Commentez le graphique avec les caractéristiques essentielles de la ligne d'eau.

Corrections

Exercice 1 Question (a)

Notons par les indices I et II, les variables correspondantes à la première partie (largeur de 10 m) et à la seconde partie du canal (largeur de 5 m) respectivement.

Le raisonnement est analogue à la Question (a) de l'exercice 3. Nous considérons un canal rectangulaire avec un débit constant $Q = qB = 20$ m^3/s. D'où :

$$h_c = \left(\frac{(Q/B)^2}{g}\right)^{1/3},$$

$$\begin{cases} h_{c,I} = \left(\dfrac{(Q/B_I)^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\dfrac{(20/10)^2}{9,81}\right)^{1/3} = 0,74 \text{ m}\,; \\ h_{c,II} = \left(\dfrac{(Q/B_{II})^2}{g}\right)^{1/3} = \left(\dfrac{(20/5)^2}{g}\right)^{1/3} = 1,18 \text{ m}\,. \end{cases}$$

Question (b) La hauteur normale est la profondeur moyenne d'eau en régime permanent uniforme. Le canal n'est pas supposé infiniment large, la hauteur normale se calcule donc par l'intermédiaire de la loi de Manning-Strickler.

$$Q = KR_H^{2/3}\sqrt{i}S,$$

où :

— K : la résistance à l'écoulement qui dépend de la taille des grains. Cette résistance peut être déduite de la formule de Jäggi, pour chaque partie du canal.

$$K = \frac{23,2}{d_{90}^{1/6}},$$

$$\begin{cases} K_I = \dfrac{23,2}{d_{90,I}{}^{1/6}} = \dfrac{23,2}{0,1^{1/6}} = 34,1 \text{ m}^{1/3}/\text{s}\,; \\ K_{II} = \dfrac{23,2}{d_{90,II}^{1/6}} = \dfrac{23,2}{0,01^{1/6}} = 50 \text{ m}^{1/3}/\text{s}\,. \end{cases}$$

— R_H : le rayon hydraulique tel que $R_H = \dfrac{S}{\chi}$. Dans le cas d'un canal rectangulaire, on a :

$$S = Bh_n = \begin{cases} S_I = B_I h_{n,I}\,; \\ S_{II} = B_{II} h_{n,II}\,. \end{cases}$$

$$\chi = B + 2h_n = \begin{cases} \chi_I = B_I + 2h_{n,I}\,; \\ \chi_{II} = B_{II} + 2h_{n,II}\,. \end{cases}$$

En appliquant la loi de Manning-Strickler, on obtient une équation implicite pour h_n :

$$Q - K\left(\frac{Bh_n}{B+2h_n}\right)^{2/3}\sqrt{i}Bh_n = 0,$$

$$Q(B+2h_n)^{2/3} - K(Bh_n)^{5/3}\sqrt{i} = 0,$$

$$f(h_n) = 0.$$

Résoudre cette dernière équation est bien trop fastidieuse à la main. Nous utiliserons l'arlgorithme de Newton-Raphson qui nous donne une valeur approchée de la solution par processus d'itération. La méthode est la suivante :

— On fixe une valeur initiale et cohérente de la solution. Dans notre cas, nous prenons la hauteur normale d'un canal supposé infiniment large, c'est-à-dire :

$$h_n(0) = \left(\frac{Q/B}{K\sqrt{i}}\right)^{3/5} = \begin{cases} h_n(0)_I = \left(\dfrac{20/10}{34,1\sqrt{0,005}}\right)^{3/5} = 0,89 \text{ m} ; \\ h_n(0)_{II} = \left(\dfrac{20/5}{50\sqrt{0,005}}\right)^{3/5} = 1,08 \text{ m} \end{cases}$$

— On calcule $h_n(i+1)$ à partir de $h_n(i)$ grâce à la formule suivante :

$$h_n(i+1) = h_n(i) - \frac{f(h_n(i))}{f'(h_n(i))},$$

jusqu'à convergence de la solution. On prendra comme critère d'arrêt :

$$\mid h_n(i+1) - h_n(i) \mid < \text{tol}$$

où tol représente la tolérance de convergence de notre solution $h_n(i+1)$;

— $f(h_n) = Q(B+2h_n)^{2/3} - K(Bh_n)^{5/3}\sqrt{i}$;

— $f'(h_n) = Q\frac{4}{3}(B+2h_n)^{-1/3} - K\frac{5}{3}B(Bh_n)^{2/3}\sqrt{i}$.

Cet algorithme peut être implémenté sur Matlab de la façon suivante :

```
clear all
close all
clc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Methode de Newton-Raphson
%
%
%
```

```
        %   hn_(i+1) = hn_(i) - f(hn_(i))/f'(hn_(i))
%
        %
%
        %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

        %% Tolerance de convergence %%
        tol=1e-3;

        %% Parametres du probleme %%
        Q=20;
        i_p=0.005;      %pente

        B=10;           %partie I
        %B=5;           %partie II

        K=34.1;         %partie I
        %K=50;          %partie II

        %% Conditions initiales %%
        hn=[];

        i=1;            %iterations

        hn(i)=0; %on definit une valeur nulle pour evaluer
                        %abs(hn(i+1)-hn(i))>tol
        hn(i+1)=((Q/B)/(K*i_p^0.5))^(3/5); %valeur initiale

        %% Boucle jusqu'a convergence de la solution %%
        while abs(hn(i+1)-hn(i))>tol

        %% Iteration suivante %%
        if(hn(i)==0)
        i=2;
        else
        i=i+1;
        end

        %% Methode d'evaluation %%
        f=Q*(B+2*hn(i))^(2/3)-K*(i_p^0.5)*(B*hn(i))^(5/3);
%fonction : f
        fp=Q*(4/3)*(B+2*hn(i))^(-1/3)-K*(5/3)*(i_p^0.5)*B*
              (B*hn(i))^(2/3);  %derivee : f'
```

```
hn(i+1)=hn(i)-f/fp;

end
```

Finalement, on trouve la hauteur normale pour chaque partie du canal :

$$\begin{cases} h_{n,I} = 0,96 \text{ m}\,; \\ h_{n,II} = 1,27 \text{ m}. \end{cases}$$

Question (c) On utilise la même procédure que dans la question (b) de l'exercice 3. La charge totale se conservant entre l'amont et le seuil, on doit avoir une diminution de la charge spécifique correspondant à la hauteur du seuil $y_s - y_a = 1$ m car :

$$H_a = H_s,$$

$$y_a + h_a + \frac{u_a^2}{2g} = H_s,$$

$$h_a + \frac{\left(\dfrac{Q}{B_{II}h_a}\right)^2}{2g} = H_s.$$

Or la hauteur d'eau au niveau du seuil correspond à la hauteur critique, c'est-à-dire $h_s = h_{c,II} = 1,18$ m. Donc

$$H_s = (y_s - y_a) + h_s + \frac{\left(\dfrac{Q}{B_{II}h_s}\right)^2}{2g} = 1 + 1,18 + \frac{\left(\dfrac{20}{5\times 1,18}\right)^2}{2\times 9,81} = 2{,}765 \text{ m}.$$

On résout l'équation $f(h_a) = 0$ à l'aide de la méthode de Newton-Raphson telle que :

$$f(h_a) = h_a^3 + \frac{\left(\dfrac{Q}{B_{II}}\right)^2}{2g} - H_s h_a^2,$$

$$f'(h_a) = 3h_a^2 - 2H_s h_a.$$

On fixe comme valeur initiale :

$$h_a(0) = H_s = 2{,}765 \text{ m}.$$

```
clear all
close all
clc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Methode de Newton-Raphson
%
%
%
% ha_(i+1) = ha_(i) - f(ha_(i))/f'(ha_(i))
%
%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Tolerance de convergence %%
tol=1e-3;

%% Parametres du probleme %%
Q=20;
B=5;
g=9.81;
hc=1.18;
y=1;          %hauteur du seuil : ys-ya
Hs=y+hc+((Q/(B*hc))^2)/(2*g);

%% Conditions initiales %%
ha=[];

i=1;          %iterations

ha(i)=0; %on definit une valeur nulle pour evaluer
                   %abs(ha(i+1)-ha(i))>tol
ha(i+1)=Hs;   %valeur initiale

%% Boucle jusqu'a convergence de la solution %%
while abs(ha(i+1)-ha(i))>tol

%% Iteration suivante %%
if(ha(i)==0)
i=2;
else
i=i+1;
end

%% Methode d'evaluation %%
f=ha(i)^3+((Q/B)^2)/(2*g)-Hs*ha(i)^2;
%fonction : f
fp=3*ha(i)^2-2*Hs*ha(i);
```

```
%derivee : f'
        ha(i+1)=ha(i)-f/fp;
        end
```

Finalement, la hauteur d'eau à l'amont du seuil est $h_a = 2,65$ m.

Question (d) Pour rappel, on observe :

— un régime subcritique plus couramment appelé régime fluvial lorsque $h > h_c$;

— un régime supercritique plus couramment appelé régime torrentiel lorsque $h < h_c$.

Comme :

— $h_{n,I} = 0,96 > h_{c,I} = 0,74$, l'écoulement est en régime subcritique dans la première partie du canal ;

— $h_{n,II} = 1,27 > h_{c,II} = 1,18$, l'écoulement est en régime subcritique dans la deuxième partie du canal ;

Question (e)

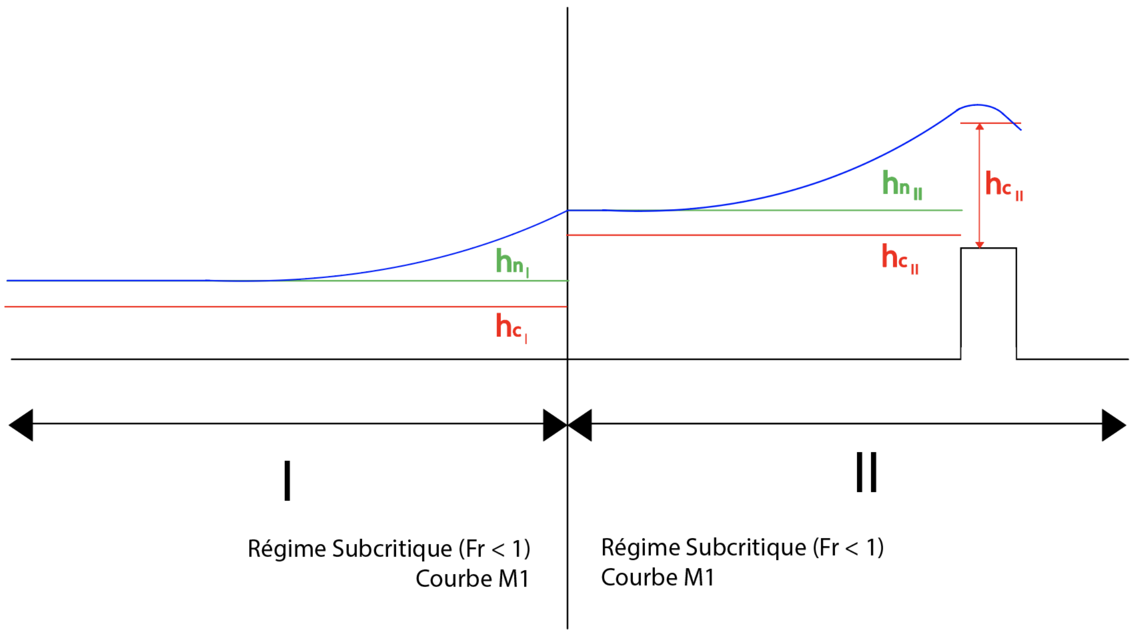

FIGURE 5 – courbe de remous.

Exercice 2 Question (a)

Dans un premier temps calculons le débit par unité de largeur dans chacune des sections, le débit $Q = 0,25$ m^3/s étant constant. Il est à noter que les sections (1), (2), (4) et (5) ont une largeur identique égale à $b_1 = 1$ m. La section (3) a une largeur $b_2 = 0,3$ m. On a donc :

$$q_1 = q_2 = q_4 = q_5 = \frac{Q}{b_1} = 0,25 \text{ m}^2/\text{s},$$

$$q_3 = \frac{Q}{b_2} = 0,833 \text{ m}^2/\text{s}.$$

Les hauteurs dans les sections (4) et (5) sont dites conjuguées dès lors qu'elles vérifient la formule de conjugaison :

$$\frac{h_5}{h_4} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 8F_{r4}^2} - 1\right), \tag{1}$$

où :

$$F_{r4} = \frac{\overline{u_4}}{\sqrt{gh_4}} = \frac{\sqrt{b_1}Q}{\sqrt{g}S^{3/2}}.$$

Pour connaître les hauteurs d'eau dans la section (5), il est nécessaire de calculer la hauteur d'eau dans la section (4). Pour cela, nous utilisons la conservation de la charge totale entre les sections (3) et (4), ainsi qu'entre les sections (2) et (3) pour connaître la hauteur h_2.

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{u_3}^2}{2g} + h_3 + h_s = \dfrac{\overline{u_2}^2}{2g} + h_2 + 0 \\ \dfrac{\overline{u_3}^2}{2g} + h_3 + h_s = \dfrac{\overline{u_4}^2}{2g} + h_4 + 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{q_3^2}{2gh_3^2} + h_3 + h_s = \dfrac{q_2^2}{2gh_2^2} + h_2 + 0 \\ \dfrac{q_3^2}{2gh_3^2} + h_3 + h_s = \dfrac{q_4^2}{2gh_4^2} + h_4 + 0. \end{cases}$$

Tout d'abord, la hauteur d'eau dans (3) correspond à la hauteur critique. En effet, à l'amont, le régime est subcritique et la hauteur d'eau correspond à la hauteur normale. Dans cette configuration, il y a trois possibilités pour la hauteur d'eau dans la section (3) :

— la hauteur d'eau reste normale ;
— la hauteur augmente car elle dépend des conditions imposées à l'aval ;
— la hauteur d'eau diminue en générant une chute d'eau, permettant ainsi une transition vers un régime supercritique.

Comme la porte verticale contrôle l'écoulement en amont de celle-ci, et qu'il y a un ressaut entre (4) et (5), la hauteur d'eau dans la section (4) doit être inférieure à h_c. C'est donc la troisième condition qui est retenu ; la hauteur d'eau dans la section (3) correspond donc à la hauteur critique. Ainsi :

$$h_3 = h_{c3} = \left(\frac{q_3^2}{g}\right)^{1/3} = 0,414 \text{ m}.$$

Les hauteurs d'eau h_2 et h_3 vérifient donc :

$$\frac{q_{2/4}^2}{2gh_{2/4}^2} + h_{2/4} = 0,82 \text{ m},$$

La résolution de cette équation donne deux solutions : 0,065 m et 0,816 m. La hauteur h_2 est contrôlée par l'écoulement en (1), qui est sub-critique. La hauteur h_4 est conjuguée à la hauteur h_5 qui est fixée par la porte verticale. La section (4) est donc en régime super-critique. On en déduit que :

$$\begin{cases} h_2 = 0,816 \text{ m}, \\ h_4 = 0,065 \text{ m}. \end{cases}$$

On suppose que les pertes de charges sont négligeables de sorte que $h_1 = h_2 = 0,816$ m. En injectant la solution obtenue pour h_4 dans l'équation 1, on obtient $h_5 = 0,412$ m.

Question (b) Pour connaître l'ouverture a dans cette condition, il faut calculer la hauteur d'eau notée $h_{\mu a}$ au niveau de l'ouverture. On suppose qu'il y a conservation de la charge entre les section (5) et (μa) :

$$\frac{\overline{u_5}^2}{2g} + h_5 + 0 = \frac{\overline{u_{\mu a}}^2}{2g} + h_{\mu a} + 0$$

$$\frac{q_5^2}{2gh_5^2} + h_5 = \frac{q_{\mu a}^2}{2gh_{\mu a}^2} + h_{\mu a}.$$

Cette équation nous donne deux solution pour $h_{\mu a}$ égales à 0,097 m et 0,412 m. Comme cette hauteur d'eau est inférieure à celle dans la section (5), on a forcément $h_{\mu a} = 0,097$ m. Au niveau d'une porte verticale, le flux se contracte de sorte que la hauteur du flux $h_{\mu a}$ est égale à μa. Ainsi :

$$a = \frac{h_{\mu a}}{\mu} = 0,167 \text{ m}.$$

Exercice 3 Question (a) Dans un premier temps, nous calculons les hauteurs critiques h_{cA} et h_{cB} dans les sections de largeur b_A et b_B respectivement :

$$\begin{cases} h_{cA} = \left(\dfrac{Q^2}{gb_A^2}\right)^{1/3} = 0,225 \text{ m}, \\ h_{cB} = \left(\dfrac{Q^2}{gb_B^2}\right)^{1/3} = 0,294 \text{ m}. \end{cases}$$

Trois hauteurs normales vont être observées dans ce canal ; le changement de ces hauteurs normales est dû soit à un changement de pente, soit à un changement de largeur. Pour déterminer la première hauteur normale dans la section correspondant à une largeur b_A et à une pente i_A, on utilise la loi de Manning-Strickler :

$$Q = K\sqrt{i_A} S_A R_{HA}^{2/3},$$

$$Q = K\sqrt{i_A} \frac{(b_A h_{nA})^{5/3}}{(b_A + 2h_{nA})^{2/3}}.$$

Note : quand on a une simple calculatrice, cette équation peut se résoudre soit par la méthode de Newton-Raphson, soit par calculatrice en isolant h_{nA}. Si on a besoin d'une valeur initiale pour commencer le calcul itératif, on peut prendre la hauteur dans le cas d'un canal infiniment large :

$$h_{nA}^0 = \left(\frac{Q}{b_A K\sqrt{i_A}}\right)^{3/5} = 0,186 \text{ m}.$$

On trouve $h_{nA} = 0,205$ m $< h_{cA}$. L'écoulement dans la section (1) est donc supercritique.

La hauteur normale dans la section de largeur b_A et de pente i_B, notée $h_{n2/3}$ est déterminée sur la base du même raisonnement que précédemment. On trouve alors $h_{n2/3} = 0,573$ m $> h_{cA} = 0,225$ m. L'écoulement entre les sections (2) et (3) est donc subcritique.

De même pour la hauteur normale dans la section de largeur b_B et de pente i_B, notée h_{nB}, on trouve $h_{nB} = 0,873$ m $> h_{cB} = 0,294$. L'écoulement est donc sub-critique dans cette partie du canal.

De cette manière, les hauteurs d'eau dans les sections (1) et (4) sont directement déterminées par les hauteurs normales dans les sections correspondantes, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} h_1 = h_{nA} = 0,205 \text{ m}, \\ h_4 = h_{nB} = 0,873 \text{ m}. \end{cases}$$

Question (b) Cette question nécessite un peu de réflexion. La question qui se pose est de savoir s'il y un ressaut hydraulique qui se forme entre les deux biefs A et B ou bien la courbe de remous est continue.

Un ressaut ne se forme que si la courbe de remous $h(x)$ coupe la hauteur critique h_c. Est-ce le cas ? Examinons les éléments à notre disposition :

— On a vu que le bief A jusqu'à la section 1 est en régime supercritique car $h_n < h_c$.

— Au niveau de la transition (1)-(2) il y a une chute d'eau. En principe cela implique qu'on passe en critique au-dessus de la marche.

— Remarque Cela n'est vrai que si la chute n'est pas noyée, c'est-à-dire si l'écoulement à l'aval n'influence pas l'amont (on ne voit pas les chutes dans le cours, mais uniquement les seuils ; le principe est toutefois le même pour toutes les singularités telles que seuil, chute, et vanne : on distingue écoulements noyé et dénoyé). Pour l'instant, on ne sait pas si la chute est noyée ou pas (et on n'a d'ailleurs pas de formule qui permette de spécifier si cela est le cas). On suppose ici que le marche n'est pas noyée.

— On a vu que dans le bief B, l'écoulement est subcritique $h_n > h_c$.

— Si on devait résoudre l'équation de la courbe de remous, on a un problème différentiel où à gauche (à l'amont) l'écoulement est supercritique, donc la condition à la limite doit être fixée à l'amont (qui n'est pas donnée). On suppose que cette condition est située loin à gauche (en amont) en sorte que l'écoulement a une hauteur proche de la hauteur normale notée h_{nA}.

— À droite, l'écoulement est subcritique, donc la condition à la limite est fixée par l'aval (qui n'est pas plus donnée). On suppose que cette condition est située loin à droite (en aval) en sorte que l'écoulement a une hauteur proche de la hauteur normale notée h_{nB}.

— L'énoncé ne dit rien quant à la distance entre les sections 1-2 et 3-4. On peut imaginer qu'elle est courte. Cela invite à négliger les pertes de charge par frottement et à raisonner de façon qualitative pour tracer la courbe de remous (sans information de distance, on ne peut résoudre l'équation de la courbe de remous). On note qu'entre ces deux sections l'écoulement subit des variations brutales :

— chute d'eau à la section (1-2), et

— rétrécissement brutal à la section (3-4).

Chaque singularité nécessite en principe d'évaluer la perte de charge singulière associée. Soulignons que cette absence d'informations fait qu'on ne peut pas calculer de courbe de remous (aucune information sur la distance) et on ne peut pas évaluer les pertes de charges singulières (ressaut éventuel, changement de section). On déduit de ce constat que le seul outil qu'on a vu dans le cours pour ce type de cas, c'est la méthode de la charge spécifique H_s vue au § 5.2.1.

Si on trace la courbe spécifique $H_s(h)$, on peut représenter le point A qui correspond à la charge spécifique dans le premier bief (point pour lequel on a $h = h_A = 20,5$ cm et $H_{s,A} = 34$ cm). Le passage de la singularité fait que la charge spécifique croît de 25 cm, et vaut donc maintenant 59 cm.

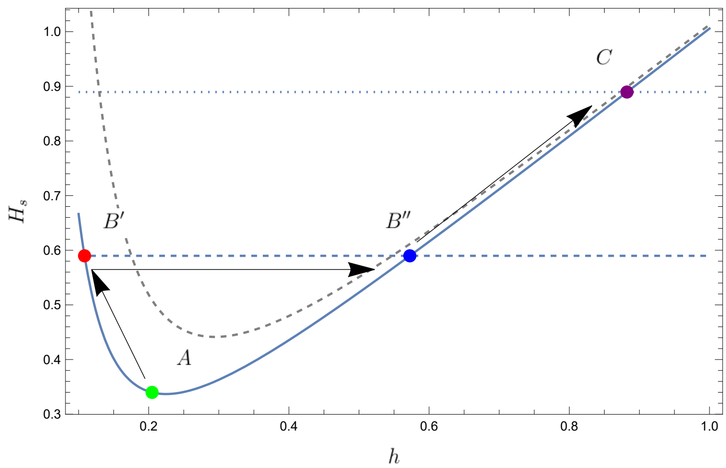

FIGURE 6 – variations de $H_s(h)$ et position des points caractéristiques.

L'intersection de cette valeur donne deux points possibles (voir figure 6) : B' (avec $h = 11$ cm) et B" (avec $h = 57$ cm). On a vu en cours qu'on ne peut pas passer continûment d'une branche super- à subcritique (ou vice-versa). On sait également que la section 3-4 est représentée par le point C avec une hauteur $h = h_3 = 88,3$ cm et $H_{s,3} = 89$ cm). On doit aller de A à C.

La seule possibilité est d'aller de A à B' continûment, puis d'avoir un ressaut permettant de passer de B' à B", puis de nouveau continûment de B" à C. De ce point C, on va ensuite à un point D qui représente l'entrée du 3ème bief (aval de la section 3-4), qu'on a du mal à représenter tellement il est proche de C. La courbe en tireté représente la charge spécifique dans le bief B (voir figure 6).

L'allure de la courbe tient compte de ces éléments (voir figure 7). Les distances entre les points sont arbitraires. La méthode permet de calculer les hauteurs, mais non la distance à laquelle ces hauteurs sont atteintes. Ici la méthode de la courbe de remous serait peut utile car même si on avait les informations manquantes, le régime serait rapidement varié et les hypothèses qui permettent la dérivation de ces équations seraient violées.

Exercice 4 Question (a) On va calculer la force de pression par unité de largeur qui s'exerce sur le barrage. En considérant la pression atmosphérique comme $p_{atm} = 0$ Pa, on peut écrire la distribution de pression hydrostatique le long du barrage comme $p = \varrho g(h_0 - y)$. On a prit le fond

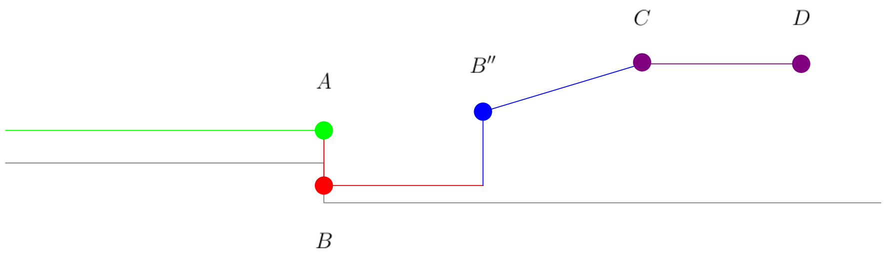

FIGURE 7 – schéma de principe de la courbe de remous (les distances sont arbitraires).

du lac comme altitude 0. On sait que la force de pression totale s'exprime comme :

$$\boldsymbol{F} = \int_S -p\boldsymbol{n}\, ds$$

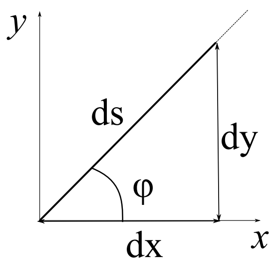

FIGURE 8 – Incrément de surface infinitésimale sur le barrage

Étant donné la géométrie du problème (voir figure 8) on peut exprimer ds en fonction de la hauteur du barrage comme suit : $ds = l\, dy/\sin\phi = 2l\, dy$, où l est la largeur (inconnue) du barrage. On veut calculer l'intensité de force de pression qui s'exerce sur le barrage, c'est-à-dire la norme de $F = ||\boldsymbol{F}||$.

$$F = ||\boldsymbol{F}|| = \left|\left|\int_S -p\boldsymbol{n}\, ds\right|\right| = \int_S ||-p\boldsymbol{n}||\, ds = \int_S p\, ds$$

Car $||\boldsymbol{n}|| = 1$. On peut donc écrire :

$$F = \int_0^{h_0} \varrho g(h_0 - y) l\, dy = 2\varrho g l [h_0 y - \frac{1}{2}y^2]_0^{h_0} = \varrho g l h_0^2 \tag{2}$$

La force de pression totale par unité de largeur est donc $f = F/l = \rho g h_0^2$. L'application numérique donne : $f = 981$ kN/m

Question (b) En se servant de la formule de Torricelli, on peut évaluer la vitesse de l'écoulement en sortie de la buse

$$u = \sqrt{2gh_0} = 14\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Le débit correspondant à cette vitesse est

$$Q = uS_{\text{buse}} = u\frac{\pi D^2}{4} = 2{,}75\,\text{m}^3\ \text{s}^{-1} \tag{3}$$

Question (c) Soit h_{sortie} la hauteur de l'écoulement dans le canal juste en aval de la buse et $S_{\text{sortie}} = \ell h_{\text{sortie}}$ la surface de l'écoulement dans le canal juste en aval de la buse. On a supposé que l'écoulement occupe toute la largeur du canal. La conservation du débit impose

$$Q = uS_{\text{sortie}} = u\ell h_{\text{sortie}} \Rightarrow h_{\text{sortie}} = \frac{Q}{u\ell} = 3{,}9\ \text{cm}$$

Question (d) En appliquant la formule de Jäggi :

$$K = \frac{23.2}{d_{90}^{1/6}} = 44{,}52 \approx 45\ \text{m}^{1/3}\ \text{s}^{-1}$$

Question (e) Nous allons utiliser la loi de Manning-Strickler pour calculer la hauteur normale h_n, c'est-à-dire la hauteur de l'écoulement en régime permanent et uniforme. Comme nous supposons le canal infiniment large ($\ell \gg h$), le rayon hydraulique devient :

$$R_H = \frac{\ell h_n}{\ell + 2h_n} = \frac{h_n}{1 + \frac{2h_n}{\ell}} \approx h_n$$

En utilisant la loi de Manning-Strickler et $u = Q/h_n\ell$ il vient :

$$\begin{aligned}
\tau_p = \frac{\varrho g}{K^2}\frac{u^2}{h_n^{1/3}} &= \varrho g i R_H \\
\Rightarrow h^{1/3} &= \frac{u^2}{K^2 i R_H} \\
\Rightarrow h_n^{1/3} &= \frac{Q^2}{h_n^3 \ell^2 K^2 i} \\
\Rightarrow h_n &= \left(\frac{Q}{\ell K \sqrt{i}}\right)^{3/5}
\end{aligned}$$

L'application numérique donne $h_n = 56{,}5$ cm

Question (f) La hauteur critique du canal se calcule en considérant l'écoulement comme étant à nombre de Froude égal à 1. Soit

$$\begin{aligned}
\text{Fr} = 1 &= \frac{u}{\sqrt{gh_c}} = \frac{Q}{\ell h_c \sqrt{gh_c}} \\
\Rightarrow h_c &= \sqrt[3]{\frac{Q^2}{\ell^2 g}} = 31{,}4\,\text{cm}
\end{aligned}$$

Question (g) Lorsque l'écoulement est permanent et uniforme la hauteur d'eau est h_n (par définition). On peut donc calculer le nombre de Froude pour cette hauteur d'eau :

$$\mathrm{Fr} = \frac{u}{\sqrt{gh_n}} = \frac{Q}{\ell h_n^{3/2}\sqrt{g}} = 0,41$$

L'écoulement est en régime subcritique.

Question (h) La charge spécifique est défini comme :

$$H_s = h + \frac{u^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2\ell^2 h^2 g} \tag{4}$$

On fait l'hypothèse que le seuil soit suffisamment épais pour que l'écoulement soit à la hauteur critique au niveau du seuil (voir les notes de cours). La charge spécifique vaut donc $H_s = 0,47$ m.

Question (i) On suppose qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie (question 8), on peut donc dire que la charge totale se conserve. La charge totale étant défini comme :

$$H = H_s + p = 1,47 \text{ m}$$

avec p la hauteur du seuil. On peut exprimer la charge totale en amont comme une fonction de la hauteur en amont h_a :

$$H = \frac{Q^2}{2\ell^2 h_a^2 g} + h_a$$
$$\Rightarrow f(h) = h_a^3 - Hh_a^2 + \frac{Q^2}{2\ell^2 g}$$

Afin de résoudre cette équation polynômiale du troisième ordre, on va utiliser la méthode de Newton. Comme indiqué dans le cours, si la vitesse est très faible en amont du seuil on peut estimer que $H \approx h_a$. On va donc utiliser $h_0 = H = 1,47$ m comme valeur initiale dans le calcul de la méthode de Newton. Elle converge vers la valeur $h_a = 1,46$ m en 5 itérations.

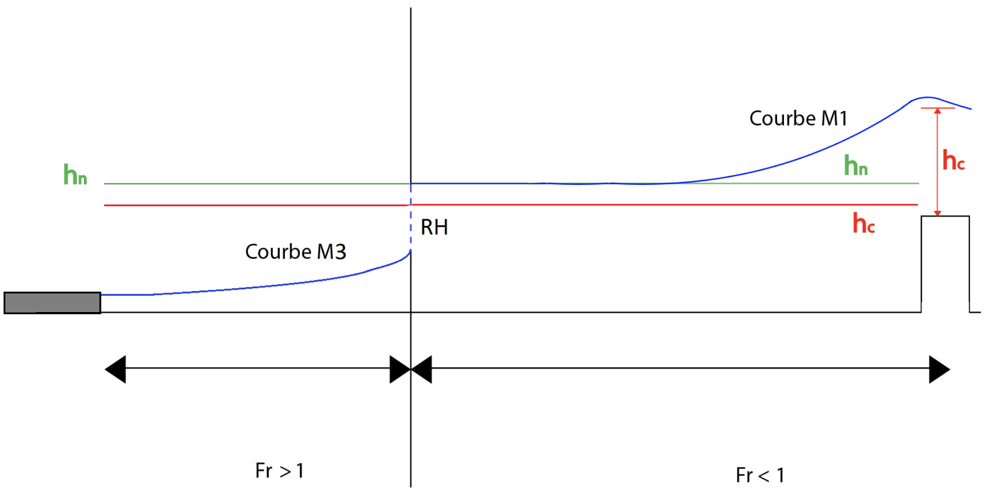

Figure 9 – Courbe de remous du canal